УДК 517.9

К ОБОСНОВАНИЮ ОБЩЕГО ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДРОБНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.Р. Агачев[1], А.В. Савина[2]

1 *jagachev@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

2 *avsavina@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В статье для решения задачи типа Коши для одного класса линейных дробно–дифференциальных уравнений применяется общий проекционный метод, основанный на аппарате приближения алгебраическими полиномами. Дано его теоретико–функциональное обоснование; в частности, доказана сходимость метода.

Ключевые слова: дробно–дифференциальное уравнение, задача типа Коши, общий проекционный метод, приближение обобщенными полиномами, сходимость метода.

Пусть m – фиксированное натуральное число, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ — заданные вещественные числа из промежутка $(0,1]$. Введем вещественные числа $\{\sigma_k\}_{k=0}^{m}$, определяемые рекуррентной формулой $\sigma_k - \sigma_{k-1} = \alpha_k, k = \overline{0,m}, \sigma_{-1} = 0$.

Рассмотрим задачу типа Коши

$$(D^{\sigma_k}_{a+}x)(a) = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{1}$$

для линейного дробно–дифференциального уравнения вида

$$Kx \equiv (D^{\sigma_m}_{a+}x)(t) + \sum_{k=1}^{m+1} g_k(t)(D^{\sigma_{m-k}}_{a+}x)(t) = y(t), \quad a < t \le b. \tag{2}$$

Здесь функции $g_k, k = \overline{1, m+1}, y$ – известные, x – искомая, определенные на $[a,b]$; $D^{\sigma_k}_{a+}x$ – дробная производная (левосторонняя) Римана–Лиувилля функции x порядка σ_k.

Задача (1), (2) при определенных условиях на известные функции имеет единственное решение (см., напр., [1, с. 603]). Там же получена формула для решения задачи (1), (2). Однако на практике это потребует вычисления дробных интегралов. Поэтому актуальна задача построения решения с определенной степенью точности, с использованием того или иного приближенного метода.

Как известно, дробная производная Римана–Лиувилля порядка $\alpha > 0$ задается формулой

$$(D^{\alpha}_{a+}x)(t) = \frac{1}{\Gamma(1+[\alpha]-\alpha)} \frac{d^{1+[\alpha]}}{dt^{1+[\alpha]}} \int_a^t \frac{x(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-[\alpha]}},$$

где $[\alpha]$ – целая часть числа α. При этом для существования этой производной достаточно выполнения условия

$$\int_a^t \frac{x(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-[\alpha]}} \in AC^{[\alpha]}[a,b].$$

Здесь $AC^{[\alpha]}[a,b]$ означает класс функций $f(t)$, имеющих на $[a,b]$ абсолютно непрерывную производную $f^{([\alpha])}(t)$ порядка $[\alpha]$ $(f^{([\alpha])} \in AC[a,b] \equiv AC^0[a,b])$.

Пусть $q = [\sigma_m] + 1$, β – произвольно фиксированное вещественное число из интервала $(0,1)$, $H_{0,\beta}[a,b]$ – пространство функций, удовлетворяющих на $[a,b]$ условию Гельдера с показателем β и обращающихся в нуль в точке a.

При условии $\beta + q - \sigma_m < 1$, т.е. $\beta < \{\sigma_m\}$, где $\{\sigma_m\} = \sigma_m - [\sigma_m]$, введем в рассмотрение два пространства: $Y = H_{0,\beta+q-\sigma_m}[a,b]$, $X = \widetilde{W^q} H_{0,\beta}[a,b]$ – пространство функций, удовлетворяющих условиям (2), имеющих на $[a,b]$ абсолютно непрерывную производную порядка $q-1$, q-ая производная которых принадлежит $H_{0,\beta}[a,b]$. Нормы в этих пространствах зададим следующим образом:

$$\|y\|_Y = \|y\|_C + H(y;\beta + q - \sigma_m),\ y \in Y;\ \|x\|_X = \|x^{(q)}\|_C + H(x^{(q)};\beta),\ x \in X.$$

Здесь $\|y\|_C$ – обычная max–норма в пространстве непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций, $H(y;\beta)$ – наименьшая постоянная Гельдера функции $y \in Y$.

В паре пространств (X,Y) задачу (1), (2) можно записать в виде одного операторного уравнения

$$Kx \equiv Dx + Gx = y\ (x \in X, y \in Y), \tag{3}$$

где операторы D и G задаются первым и вторым слагаемыми в левой части уравнения (2):

$$(Dx)(t) = (D_{a+}^{\sigma_m} x)(t),\ (Gx)(t) = \sum_{k=1}^{m+1} g_k(t)(D_{a+}^{\sigma_{m-k}} x)(t).$$

В паре пространств (X,Y) оператор D дробного интегрирования совпадает с дробно–интегральным оператором Капуто:

$$(Dx)(t) = (J_{a+}^{q-\sigma_m} x^{(q)})(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(q-\sigma_m)} \int_a^t \frac{x^{(q)}(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\sigma_m - q+1}}.$$

Поэтому оператор $D : X \to Y$ непрерывно обратим.

Заметим, что для дробной производной порядка α имеют место соотношения $(D_{a+}^{\alpha} x)(a) = 0$, если $x(t) = (t-a)^\gamma, \gamma > \alpha$. С учетом этого свойства для дробных производных, приближенное решение уравнения (3) (или задачи (1), (2)) будем искать в виде обобщенного полинома

$$x_n(t) = (t-a)^{\sigma_m} \sum_{i=0}^{n} c_i (t-a)^i, \tag{4}$$

Пусть H_n есть подпространство алгебраических полиномов степени не выше n. Во введенных выше пространствах введем подпространства $X_n = \{(4)\} \subset X, Y_n = H_n \subset Y$. Пусть $P_n : Y \to Y_n$ – произвольно фиксированный оператор проектирования Y на Y_n.

Будем определять неизвестные коэффициенты $\{c_k\}$ приближенного решения (4) из условия, что $x_n(t)$ является точным решением уравнения

$$K_n x_n \equiv Dx_n + P_n G x_n = P_n y\ (x_n \in X_n). \tag{5}$$

Уравнение (5) является уравнением общего проекционного метода решения задачи (1), (2), задаваемого оператором проектирования P_n. Этот оператор может быть проекционным, т. е. полиномы степени не выше n оставлять на месте, или же таким свойством не обладать. Отметим, что известные проекционные методы, такие как методы Галеркина, подобластей и коллокации, задаются проекционными операторами. Однако методы, построенные на основе суммирования рядов Фурье и интерполяционных полиномов, как правило, этим свойством не обладают.

Следующая теорема дает обоснование проекционного метода, определяемого уравнением (5).

Теорема. *Пусть выполнены предположения:*

1) $p_k, k=\overline{1,m+1}$, $y \in H_{0,\lambda}[a,b]$, $\beta - \{\sigma_m\} < \lambda - 1 \le 0$*;*

2) *задача (1), (2) имеет единственное решение при любой правой части из* Y*;*

3) *оператор* P_n *является проекционным и* $\|P_n\|_{C\to C} = O(\ln n)$.

Тогда уравнение (5), хотя бы начиная с некоторого натурального n_0*, также имеет единственное решение* x_n^**, определяемое по формуле (4). При этом приближенное решение* x_n^* *при* $n\to\infty$ *сходится к точному решению* x^* *задачи (1), (2) в метрике пространства* X *со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\Big(\ln n \cdot n^{\beta+1-\{\sigma_m\}-\lambda}\Big).$$

Доказательство теоремы основано на следующем результате [2].

Лемма. *Пусть* $0<\alpha<\mu<\infty$*, функция* $f\in C$ *и оператор* $P_n : C \to H_n$ *таковы, что*

$$\|f - P_n f\|_C = O\left(\frac{\ln n}{n^{\mu}}\right).$$

Тогда при $\alpha \le 1$

$$\|f - P_n f\|_\alpha = O\left(\frac{\ln n}{n^{\mu-\alpha}}\right).$$

Как следствие, из теоремы непосредственно вытекает обоснование следующих методов:

1) метода Галеркина, построенного по системе полиномов Чебышева первого рода;

2) метода подобластей, построенного по экстремальным точкам полинома Чебышева первого рода;

3) метода коллокации, построенного по узлам Чебышева первого или второго рода.

Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. А. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Agachev J. R., Galimyanov A. F. *On Justification of General Polynomial Projection Method for Solving Periodic Fractional Integral Equations* // Lobachevskii J. Math. – 2015. – V. 36, No. 2. – P. 97–102.

TO THE JUSTIFICATION OF A GENERAL PROJECTION METHOD FOR SOLVING A CAUCHY-TYPE PROBLEM FOR LINEAR FRACTIONAL–DIFFERENTIAL EQUATIONS

J.R. Agachev, A.V. Savina

In the paper, a general projection method based on the approximation apparatus by algebraic polynomials is applied to solve a Cauchy–type problem for a class of linear fractional–differential equations. Its theoretical and functional justification is given; in particular, the convergence of the method is proved.

Keywords: fractional differential equation, Cauchy–type problem, general projection method, approximation by generalized polynomials, convergence of the method.

УДК 517.547

О НЕРАВЕНСТВЕ БОРА С ФИКСИРОВАННЫМ НУЛЕВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

С.А. Алхалифах[1], И.Р. Каюмов[2], С. Поннусами[3]

1 *s.alkhaleefah@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

2 *ikayumov@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

3 *samy@isichennai.res.in, samy@iitm.ac.in*; Индийский статистический институт (ISI), Ченнайский центр, SETS (Общество электронных транзакций и безопасности), Ченнай, Индия

В работе получена улучшенная версия неравенства Бора для аналитических функций, определенных в единичном круге $D = \{z \in C : |z| \le 1\}$.

Ключевые слова: неравенство Бора, аналитические функции.

Классический результат Х. Бора [1], который в окончательную форму привели М. Рисс, И. Шур и Ф. Винер, состоит в следующем: Предположим, что $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ является аналитической функцией в D и $|f(z)| \le 1$ для всех $z \in D$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \le 1 \ \text{ для всех } \ r \le \frac{1}{3}, \tag{1}$$

где $r = |z|$, причем константа $1/3$ не может быть улучшена.

Нами получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *– аналитическая функция в* D *и* $|f(z)| \le 1$ *для всех* $z \in D$. *Тогда*

$$|a_0| + \frac{\frac{1}{4}(1-|a_0|^2)^2}{1-\frac{1}{4}(1-|a_0|^2)} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k \le 1 \ \text{ для всех } \ r \le \frac{1}{3}, \tag{2}$$

где $r = |z|$, *причем константы* $1/3$, $1/4$ *(в числителе) и* $1/4$ *(в знаменателе) не могут быть улучшены.*

Теорема 2. *Предположим, что* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *является аналитической функцией в* D *и* $|f(z)| \le 1$ *для всех* $z \in D$. *Тогда*

$$|a_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k| + \frac{\frac{1}{2}|a_k|^2}{1-\frac{1}{4}|a_k|} \right) r^k \le 1 \ \text{ для всех } \ r \le \frac{1}{3}, \tag{3}$$